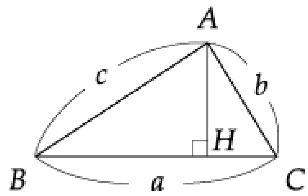
余弦定理の導出

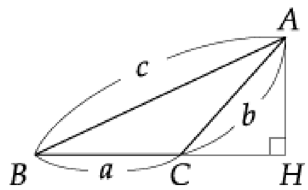
（$\triangle ABC$ において、$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ の大きさをそれぞれ A, B, C で表し、頂点 A, B, C の対辺の長さをそれぞれ a, b, c で表すとする。）

まず、$\triangle ABC$ の頂点 A から直線 BC に垂線 AH を引き、a を求める。



- H が辺 BC 上にある場合

$$\begin{aligned} a &= BC = BH + HC \\ &= c\cos B + b\cos C \end{aligned}$$



- H が辺 BC の延長上にある場合

$$\begin{aligned} a &= BC = BH - CH \\ &= c\cos B - b\cos(180^\circ - C) \\ &= c\cos B + b\cos C \end{aligned}$$

- H が辺 CB の延長上にある場合も同様。

これより、次の等式が成り立つ。

$$a = b\cos C + c\cos B \tag{1}$$

同様にして、次の等式が導かれる。

$$b = c\cos A + a\cos C \tag{2}$$
$$c = a\cos B + b\cos A \tag{3}$$

(1)(2)(3) から、次のように変形する。

(1)$\times a$ より　$a^2 = ab\cos C + ca\cos B$ (4)

(2)$\times b$ より　$b^2 = bc\cos A + ab\cos C$ (5)

(3)$\times c$ より　$c^2 = ca\cos B + bc\cos A$ (6)

(4)$-$(5)$-$(6) から

$$a^2 - b^2 - c^2 = -2bc\cos A$$
$$\therefore\quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

b^2, c^2 についても同様に導くことができ、次の余弦定理が得られる。

余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$