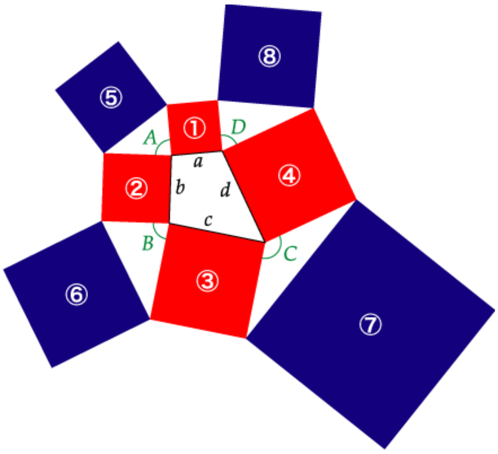
[問題]



任意の四角形の周りを、右上図のように正方形が取り囲んでいる。このとき、

左辺　①＋②＋③＋④

右辺　⑤＋⑥＋⑦＋⑧＋⑨＋⑩

が等式として成り立つように（係数を調節）せよ。ただし、式の中の①〜⑩はその面積を表すものとする。

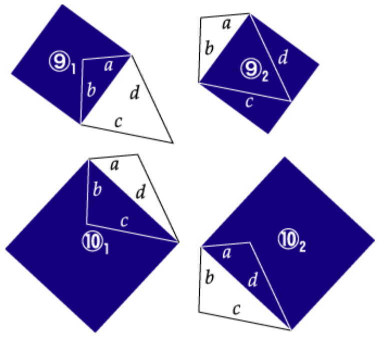
また、⑨と⑩は、任意の四角形の各々の対角線を一辺とする正方形である。

[解]

（準備として右図のように、⑨を⑨$_1$・⑨$_2$、⑩を⑩$_1$・⑩$_2$ と 2 種類ずつ分けておく。面積はそれぞれ同じである）

まず、左辺の①〜④の面積を求めると

$$\begin{aligned} \text{①} &= a^2 \\ \text{②} &= b^2 \\ \text{③} &= c^2 \\ \text{④} &= d^2 \end{aligned} \tag{1}$$



となる。

次に、⑤〜⑩の面積について考える。余弦定理[*1]より

$$\begin{aligned} \text{⑤} &= a^2+b^2-2ab\cos A \\ \text{⑥} &= b^2+c^2-2bc\cos B \\ \text{⑦} &= c^2+d^2-2cd\cos C \\ \text{⑧} &= d^2+a^2-2da\cos D \\ \text{⑨}_1 &= a^2+b^2+2ab\cos A \\ \text{⑩}_1 &= b^2+c^2+2bc\cos B \\ \text{⑨}_2 &= c^2+d^2+2cd\cos C \\ +)\quad \text{⑩}_2 &= d^2+a^2+2da\cos D \\ \hline & 4(a^2+b^2+c^2+d^2) \end{aligned} \tag{2}$$

となる。ここで、⑨ = ⑨$_1$ = ⑨$_2$、⑩ = ⑩$_1$ = ⑩$_2$ だから、(1)(2) より

$$\text{⑤}+\text{⑥}+\text{⑦}+\text{⑧}+2(\text{⑨}+\text{⑩}) = 4(\text{①}+\text{②}+\text{③}+\text{④})$$

である。■

---

*1 右の △ABC（ただし、A, B, C は角の大きさ、a, b, c は辺の長さを表す）で、

$a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos A$

が成り立つという定理。