オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ の導出

オイラーの公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad \text{（ただし、}i\text{ は虚数単位、}x\text{ は実数）}$$

［導出］

e^x の定義から

$$e^x = \lim_{h \to 0} (1+h)^{\frac{x}{h}}$$

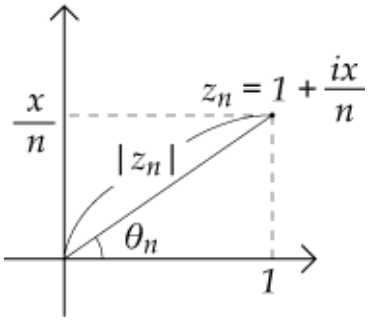
これを $\dfrac{x}{h} = n(>0)$ として変形すると

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \qquad \text{だから} \qquad e^{ix} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n$$

n は ∞ にもっていくので、自然数に限定して考える。

ここで、$(1+ix), \left(1+\dfrac{ix}{2}\right), \left(1+\dfrac{ix}{3}\right), \ldots$ という数列 $z_n = \left(1+\dfrac{ix}{n}\right)$ を考え、その後 ${z_n}^n$ を考えることにする。

$$e^{ix} = \lim_{n \to \infty} {z_n}^n$$

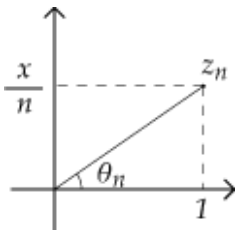


z_n の偏角を θ_n、大きさを $|z_n|$ とおく。

$$\Longrightarrow \quad {z_n}^n \text{ の} \begin{cases} \text{偏角} & n\theta_n \\ \text{大きさ} & |z_n|^n \end{cases}$$

よって、e^{ix} は $\begin{cases} \text{偏角} & \lim\limits_{n \to \infty} n\theta_n \\ \text{大きさ} & \lim\limits_{n \to \infty} |z_n|^n \end{cases}$ という複素数である。

次に、この偏角と大きさが、実際にどのような値になるのかを求める。



◎ $n\theta_n$ を考える

$\tan\theta_n = \dfrac{x}{n}$ を利用する。

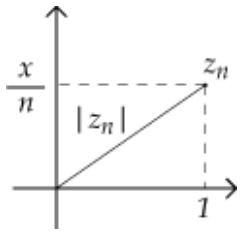
$$n\theta_n = \underbrace{n \cdot \tan\theta_n}_{x} \cdot \frac{\theta_n}{\tan\theta_n}$$

ここで $\dfrac{\theta_n}{\tan\theta_n}$ の値を求める。

$n \to \infty$ のとき $\theta_n \to 0$、また、$\theta \to 0$ のとき $\cos\theta \to 1$、$\dfrac{\sin\theta}{\theta} \to 1$ なので

$$\frac{\theta_n}{\tan\theta_n} = \frac{\theta_n}{\sin\theta_n} \cdot \cos\theta_n \xrightarrow{n \to \infty} 1$$

ゆえに、$n \to \infty$ のとき $n\theta_n \to x$



◎ $|z_n|^n$ を考える

$$|z_n| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{x}{n}\right)^2} \quad \text{より} \quad |z_n|^n = \left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

また、$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$ より $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)^{n^2} = e^{x^2}$ を使うため

$$|z_n|^n = \left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} = \left\{\left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)^{n^2}\right\}^{\frac{1}{2n}} \quad \text{と変形する。}$$

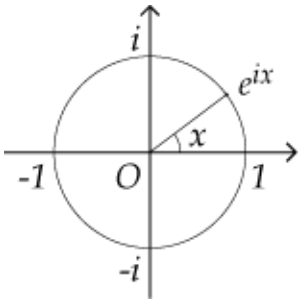
$n \to \infty$ のとき、$\left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)^{n^2} \to e^{x^2}$、$\frac{1}{2n} \to 0$ となる。

ゆえに、$n \to \infty$ のとき $|z_n|^n \to \left(e^{x^2}\right)^0 = 1$

これらをまとめると、$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} n\theta_n = x \\ \lim_{n\to\infty} |z_n|^n = 1 \end{cases}$ となる。

よって、e^{ix} は偏角 x、大きさ 1 の複素数 である。

図を描くと、右図のようになり、これより

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

が成り立つことがわかる。■