ライプニッツの公式と証明

ライプニッツの公式

$$
\begin{aligned}
(f(x)g(x))^{(n)} =& f^{(n)}(x)g(x) + nf^{(n-1)}(x)g'(x) + \cdots \\
&+ \binom{n}{i} f^{(n-i)}(x)g^{(i)}(x) + \cdots + nf'(x)g^{(n-1)}(x) + f(x)g^{(n)}(x)
\end{aligned}
$$

ただし、$\binom{n}{i} = {}_nC_i = \dfrac{n!}{(n-i)!i!}$

[証明]

数学的帰納法で示す。

① $n = 1$ のとき

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

より成り立つ。

② $n = k$ のとき成り立つとする。

③ $n = k+1$ のとき

$$
\begin{aligned}
&(f(x)g(x))^{(k+1)} \\
=& \left((f(x)g(x))^{(k)}\right)' \\
=& \left(f^{(k)}(x)g(x) + \cdots + \binom{k}{i} f^{(k-i)}(x)g^{(i)}(x) + \cdots + f(x)g^{(k)}(x)\right)' \\
=& \left(f^{(k+1)}(x)g(x) + f^{(k)}(x)g'(x)\right) + \cdots + \binom{k}{i-1}\left(f^{(k-i+2)}(x)g^{(i-1)}(x) + \underline{f^{(k-i+1)}(x)g^{(i)}(x)}\right) \\
&+ \binom{k}{i}\left(\underline{f^{(k-i+1)}(x)g^{(i)}(x)} + f^{(k-i)}(x)g^{(i+1)}(x)\right) + \cdots + \left(f'(x)g^{(k)}(x) + f(x)g^{(k+1)}(x)\right)
\end{aligned}
$$

下線部を１つにまとめることを考える。$\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i} = \binom{k+1}{i}$ だから[*1]、上の式は

$$f^{(k+1)}(x)g(x) + \cdots + \binom{k+1}{i} f^{((k+1)-i)}(x)g^{(i)}(x) + \cdots + f(x)g^{(k+1)}(x)$$

となるので成り立つ。よって証明された。■

[*1]

$$\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i} = \frac{k!}{(k-i+1)!(i-1)!} + \frac{k!}{(k-i)!i!} = \frac{i \cdot k! + (k-i+1) \cdot k!}{(k-i+1)!i!} = \frac{(k+1)!}{((k+1)-i)!i!} = \binom{k+1}{i}$$