

ド・モアブルの定理と証明

ド・モアブルの定理

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx \quad (i = \sqrt{-1}, n = 1, 2, \dots)$$

[証明]

数学的帰納法で証明する。

- ① $n = 1$ のときは明らかに成り立つ。
- ② $n = k$ のとき成り立つとする。
- ③ $n = k + 1$ のとき

$$\begin{aligned}(\cos x + i \sin x)^{k+1} &= (\cos x + i \sin x)^k (\cos x + i \sin x) \\ &= (\cos kx + i \sin kx)(\cos x + i \sin x) \\ &= \cos kx \cos x + i \cos kx \sin x + i \sin kx \cos x - \sin kx \sin x \\ &= (\cos kx \cos x - \sin kx \sin x) + i(\sin kx \cos x + \cos kx \sin x) \\ &= \cos(k+1)x + i \sin(k+1)x\end{aligned}$$

となるので成り立つ。よって証明された。■

※ なお、オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を知っていれば、下のようにもっと簡単に証明できる。

$$(\cos x + i \sin x)^n = (e^{ix})^n = e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$$