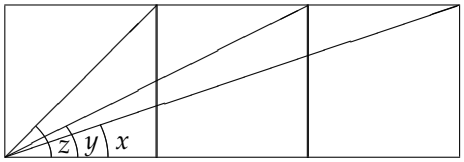
図形の問題

こんな問題があります。

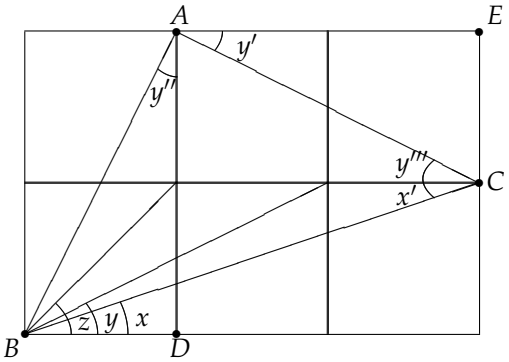
問：正方形が 3 つある。



このとき、$x+y+z=90°$を示せ。

この問題の解答を、2 つの方法で紹介します。1 つ目は小学生でもわかる方法、2 つ目は複素平面を使った方法です。

[解法 1]



$z=45°$は明らかなので、$x+y=45°$を示せばよい。

図を拡張して、上図のようにする。これより、$y=y'=y''$ である。

$\angle EAD=90°$だから、$\angle CAB=\angle EAD-y'+y''=90°$である。

また、$AB=AC$ なので、$\triangle ABC$ は二等辺三角形。

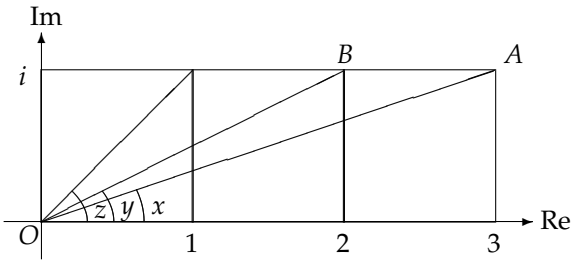
よって、$\angle ACB=\angle ABC=45°$となる。

ここで、$\angle ACB=x'+y'''$ $(x'=x,\ y'''=y)$ だから、$x+y=45°$となる。

ゆえに、$x+y+z=90°$である。■

[解法 2]

図のような複素平面を考える。



解法 1 と同じく、$z = 45°$は明らかなので、$x + y = 45°$を示す。
$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を複素数で表し、さらに極座標表示をする（ただし、$0° < x < y < 45°$）。すると、

$$\overrightarrow{OA} = 3 + i = <\sqrt{10}, x>$$
$$\overrightarrow{OB} = 2 + i = <\sqrt{5}, y>$$

となる。この 2 つをかけると、上の式より

$$(3+i)(2+i) = <\sqrt{50}, x+y> \tag{1}$$

となる。ここで、$(3+i)(2+i)$ の偏角は $x+y$ である。
一方、最初の式を考えずに $(3+i)(2+i)$ を計算すると

$$(3+i)(2+i) = 6 + 5i + i^2 = 5 + 5i = <\sqrt{50}, 45°> \quad \left(\because \tan^{-1}\frac{5}{5} = 45°\right) \tag{2}$$

となる。(1) と (2) の偏角を考えると、$x + y = 45°$が成り立つ。
ゆえに、$x + y + z = 90°$である。■