連立方程式を行列式で解く

以下は連立方程式の問題です。普通に解いてもよいのですが、ここでは行列式を使って解いてみます。

次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma+\delta=10 \\ 4\alpha-\delta=0 \\ 2\beta-3\gamma=0 \\ 3\alpha+\beta-3\gamma=0 \end{cases}$$

［解法］

まず、文字のそれぞれの係数をとって $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}$ とおきます。すると、

$$\alpha=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 10 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} \tag{1}$$

となります。さらに、

$$\beta=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & 10 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}, \tag{2}$$

$$\gamma=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \tag{3}$$

$$\delta=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} \tag{4}$$

となります。では、これらの行列式を計算していきます。まず、Δ を求めます。

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = - \{5 \cdot 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot (-3) - 1 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot (-3) \cdot 5 - (-3) \cdot 1 \cdot 0\} \\
&= - \{(-30) + (-9) - 6 - (-15)\} = 30 + 9 + 6 - 15 = 30
\end{aligned}
$$

次に、α、β、γ、δ にそれぞれ含まれる Δ でない行列式の値を求めます。

α に含まれる Δ でない行列式：

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 10 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} \\
=&10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -10 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -10 \{2 \cdot (-3) - (-3) \cdot 1\} = -10(-6+3) = 30
\end{aligned}
$$

式 (1) に代入すると、

$$
\alpha = \frac{30}{30} = 1 \tag{5}
$$

β に含まれる Δ でない行列式：

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 1 & 10 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 1 & 1 \\ 5 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} 5 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 10 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 10 \cdot 9 = 90
\end{aligned}
$$

式 (2) に代入すると、

$$
\beta = \frac{90}{30} = 3 \tag{6}
$$

γ に含まれる Δ でない行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 & 1 \\ 5 & 1 & 10 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 5 & 1 & 10 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -10 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10 \cdot (-6) = 60$$

式 (3) に代入すると

$$\gamma = \frac{60}{30} = 2 \tag{7}$$

δ は、問の連立方程式の第 1 式より

$$\delta = 10 - \alpha - \beta - \gamma = 10 - 1 - 3 - 2 = 4 \tag{8}$$

となります。式 (5)、(6)、(7)、(8) より答えは　$\alpha = 1,\ \beta = 3,\ \gamma = 2,\ \delta = 4$　となります。

A　$\alpha = 1, \quad \beta = 3, \quad \gamma = 2, \quad \delta = 4$

一般に、連立方程式

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma + d_1\delta + e_1\varepsilon + \cdots = k_1 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2\gamma + d_2\delta + e_2\varepsilon + \cdots = k_2 \\ a_3\alpha + b_3\beta + c_3\gamma + d_3\delta + e_3\varepsilon + \cdots = k_3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_n\alpha + b_n\beta + c_n\gamma + d_n\delta + e_n\varepsilon + \cdots = k_n \end{cases}$$

の解は

$$\alpha = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & \cdots \\ k_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & \cdots \\ k_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ k_n & b_n & c_n & d_n & e_n & \cdots \end{vmatrix}, \quad \beta = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 & d_1 & e_1 & \cdots \\ a_2 & k_2 & c_2 & d_2 & e_2 & \cdots \\ a_3 & k_3 & c_3 & d_3 & e_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_n & k_n & c_n & d_n & e_n & \cdots \end{vmatrix}, \ldots$$

となります。$\left(\text{ただし、} \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & \cdots \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & \cdots \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_n & b_n & c_n & d_n & e_n & \cdots \end{vmatrix} \right)$