

# 物体の放物運動について

—微分方程式に取り組む—

# 1 研究をはじめた動機

微分方程式に興味を持ったので、比較的取り組みがしやすい  
そんな物体の放物運動について考察した。最初は数学的に  
考察しただけだったが、さらに実験を付け加えて、数学的  
な結果とどれだけ違いが出るかを調べることにした。

## 2 前提条件

---

- 質量  $m$  のボールが、高さ  $h$  の場所から初速度  $v_0$  で飛び出すと考える。

## 2 前提条件

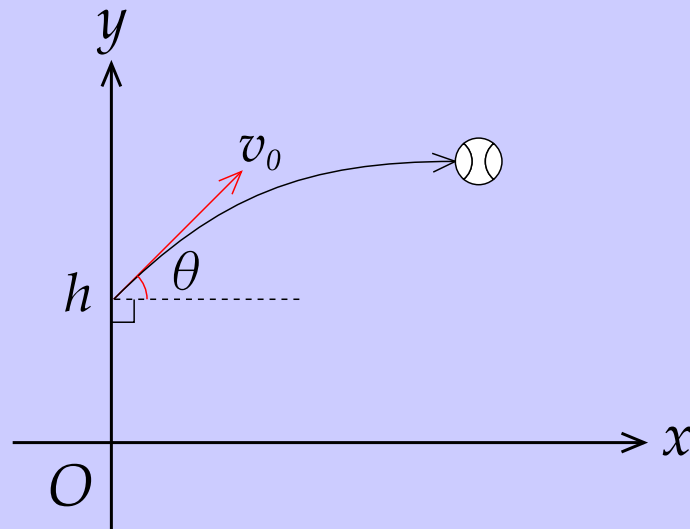
---

- 質量  $m$  のボールが、高さ  $h$  の場所から初速度  $v_0$  で飛び出すと考える。
- ただし、空気抵抗はないものとする。

## 2 前提条件

---

- 質量  $m$  のボールが、高さ  $h$  の場所から初速度  $v_0$  で飛び出すと考える。
- ただし、空気抵抗はないものとする。
- $v_0$  の方向（ボールが飛び出す方向）と水平面がなす角を  $\theta$  とおく。



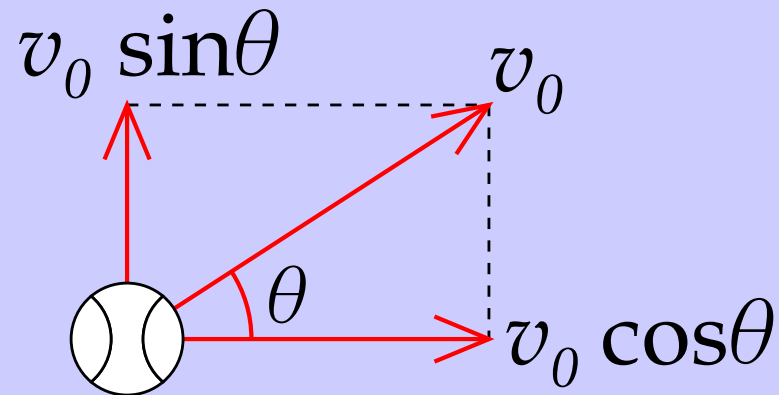
### 3 初速度について

---

初速度  $v_0$  を  $x$  方向と  $y$  方向に分解して考えると、

- $x$  方向の初速度  $\cdots v_0 \cos \theta$
- $y$  方向の初速度  $\cdots v_0 \sin \theta$

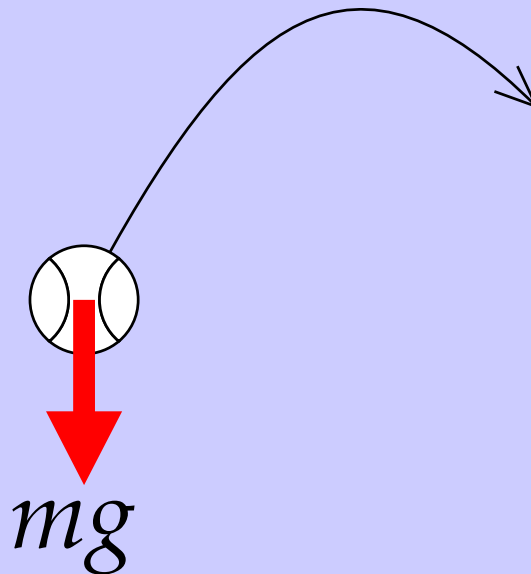
となる。



## 4 ボールに働く重力

ボールが飛び出した後、働く力は重力だけなので、その力は  $mg$  と表される ( $g$  は重力加速度)。その向きは下向きである。

※ ただし  $g$  は、地球上では  $9.8(\text{m/s}^2)$  という値をとる加速度である。



## 5 放物運動を分解

---

ボールの運動を水平 ( $x$  軸) 方向と鉛直 ( $y$  軸) 方向に分けて考える。

## 5 放物運動を分解

---

ボールの運動を水平 ( $x$  軸) 方向と鉛直 ( $y$  軸) 方向に分けて考える。

- **水平方向**

ボールに働く力は鉛直下向き方向の重力だけなので、水平方向に力は働かない。よって、水平方向の力  $F_x$  は 0 になる。ボールの水平方向の加速度を  $a_x$  とおいて、運動方程式  $F = ma$  にあてはめると、 $F = F_x = 0$ 、 $a = a_x$  となるので、次のようになる。

$$ma_x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a_x = 0 \quad (\because m \neq 0)$$

## 5 放物運動を分解

---

ボールの運動を水平 ( $x$  軸) 方向と鉛直 ( $y$  軸) 方向に分けて考える。

- **鉛直方向**

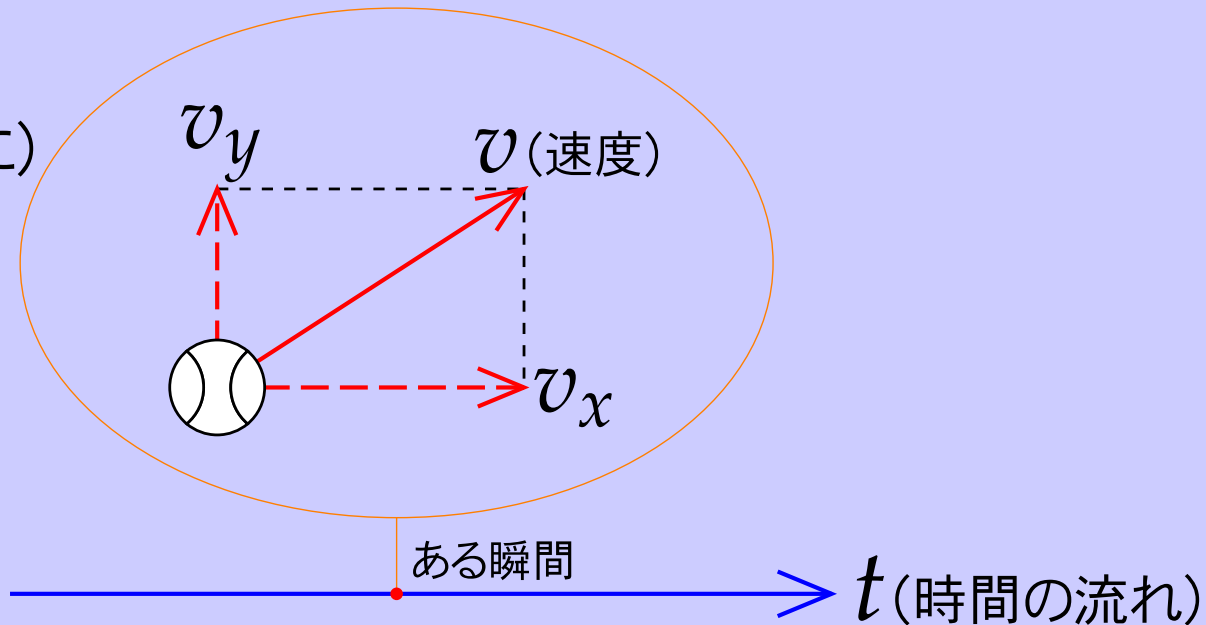
ボールに鉛直方向に働く力は、下向きの重力  $mg$  である。よって、鉛直方向に働く力  $F_y$  は  $-mg$  になる。ボールの鉛直方向の加速度を  $a_y$  とおいて、運動方程式にあてはめると、次のようになる。

$$ma_y = -mg \quad \iff \quad a_y = -g$$

## 6 放物運動の式を求める

微分方程式で放物運動の式を求める。準備として、ボールの  $x$  方向、 $y$  方向の速度をそれぞれ  $v_x, v_y$  とおく。また、時刻を  $t$  とおく。

速度の分解  
( $v$ を $v_x$ と $v_y$ に)



## 6 放物運動の式を求める

---

速度を時間で微分すると加速度になるので、微分方程式

$$\frac{dv_x}{dt} = a_x, \quad \frac{dv_y}{dt} = a_y$$

が成り立つ。それぞれの両辺を  $t$  で積分すると、先程求めたように、 $a_x = 0$ ,  $a_y = -g$  だから、

$$v_x = \int a_x dt = C_1, \quad v_y = \int a_y dt = -gt + C_2$$

となる（ただし、 $C_1$ 、 $C_2$  は積分定数）。

## 6 放物運動の式を求める

---

$t = 0$  のとき、 $v_x$  は  $v_0 \cos \theta$ 、 $v_y$  は  $v_0 \sin \theta$  なので、

$$v_x = C_1, \quad v_y = -gt + C_2$$

に代入すると、

$$C_1 = v_0 \cos \theta, \quad C_2 = v_0 \sin \theta$$

である。よって、

$$v_x = v_0 \cos \theta, \quad v_y = -gt + v_0 \sin \theta$$

となる。

## 6 放物運動の式を求める

---

一方、距離を時間で微分すると速度になるので、

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y$$

が成り立つ。それぞれの両辺を  $t$  で積分すると

$$x = \int v_x dt = v_0 \cos \theta \cdot t + C_3$$

$$y = \int v_y dt = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \theta \cdot t + C_4$$

となる（ただし、 $C_3$ 、 $C_4$  は積分定数）。

## 6 放物運動の式を求める

---

$t = 0$  のとき、 $x = 0$ 、 $y = h$  だから、

$$x = v_0 \cos \theta \cdot t + C_3, \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \theta \cdot t + C_4$$

に代入すると、

$$C_3 = 0, \quad C_4 = h$$

である。よって、

$$x = v_0 \cos \theta \cdot t$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \theta \cdot t + h$$

となる。

## 7 考察

---

ボールが打ち出されてから落ちるまでの時間と距離を求め。

## 7 考察

---

ボールが落ちたとき、 $y = 0$  となるので、

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \theta \cdot t + h = 0$$

が成り立つ。これを  $t$  について解くと

$$t = \frac{v_0 \sin \theta \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2 \theta + 2gh}}{g}$$

となる。 $t$  は負ではないので、落ちた時の時間は

$$t = \frac{v_0 \sin \theta + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \theta + 2gh}}{g}$$

である。

## 7 考察

---

$$t = \frac{v_0 \sin \theta + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \theta + 2gh}}{g}$$

を  $x = v_0 \cos \theta \cdot t$  に代入すると、打ち出した地点から落ちた地点までの距離が求まる。

$$\begin{aligned} x &= v_0 \cos \theta \cdot \frac{v_0 \sin \theta + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \theta + 2gh}}{g} \\ &= \frac{v_0 \cos \theta}{g} \left( v_0 \sin \theta + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \theta + 2gh} \right) \end{aligned}$$

## 8 実験

---

次に、実験をして、実測値と計算値でどれだけ違いがあるかを調べることにする。

この実験では、考察で求めた、打ち出した地点から落ちた地点までの距離の式を使って誤差を調べた。(時間についての実験は行わなかった)

初速度を決めて発射させるような実験装置を作ることは困難なので、ゴムを使って任意の角度でボールを発射し、その初速度を測定できるような装置を製作した。飛距離の測定は着地点を目視することにより行った。

## 8 実験

---

実験は具体的に以下のようにして行なった。

## 8 実験

---

実験は具体的に以下のようにして行なった。

- ボールには、空気抵抗の影響が少ないビー玉を大小1つずつ使用した。

## 8 実験

---

実験は具体的に以下のようにして行なった。

- ボールには、空気抵抗の影響が少ないビー玉を大小1つずつ使用した。
- 発射する角度は、 $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $60^\circ$ で5回ずつ試した。

## 8 実験

---

実験は具体的に以下のようにして行なった。

- ボールには、空気抵抗の影響が少ないビー玉を大小1つずつ使用した。
- 発射する角度は、 $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $60^\circ$ で5回ずつ試した。
- 飛ばしたら初速度を求めて、数学的に導いた式に代入した。そして、実際の飛距離と計算での飛距離とで、誤差がどのくらいあるか求めた。

## 9 実験装置

---

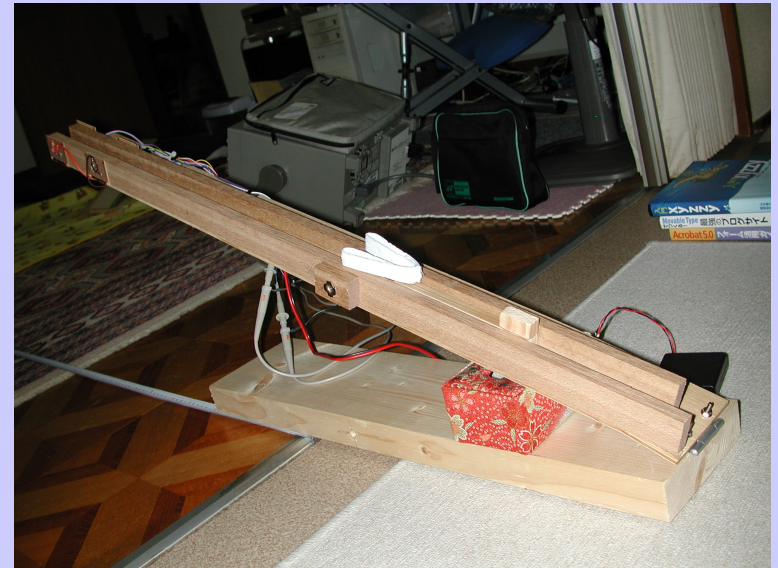
ビー玉を飛ばすのには、次のような装置を作り、実験した。

## 9 実験装置

---

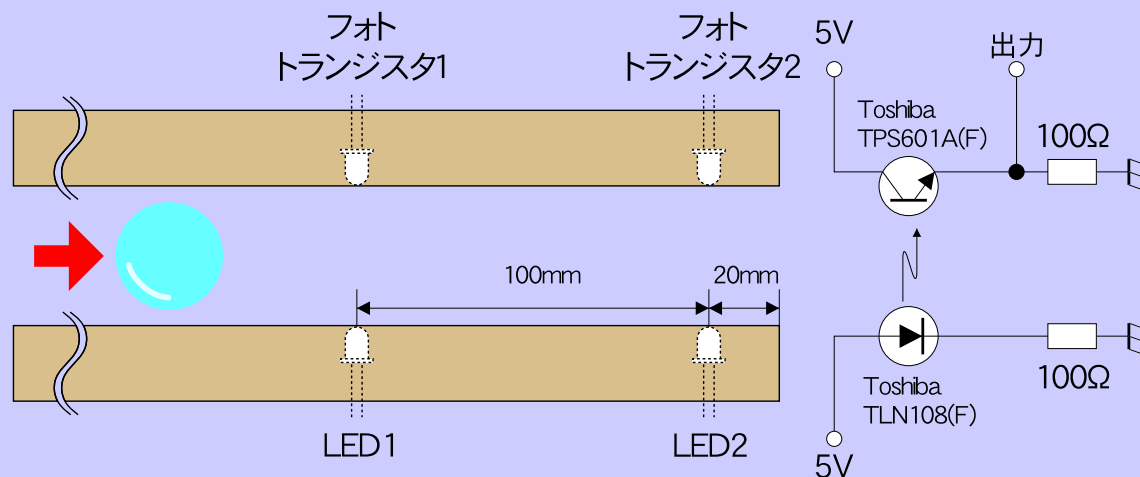
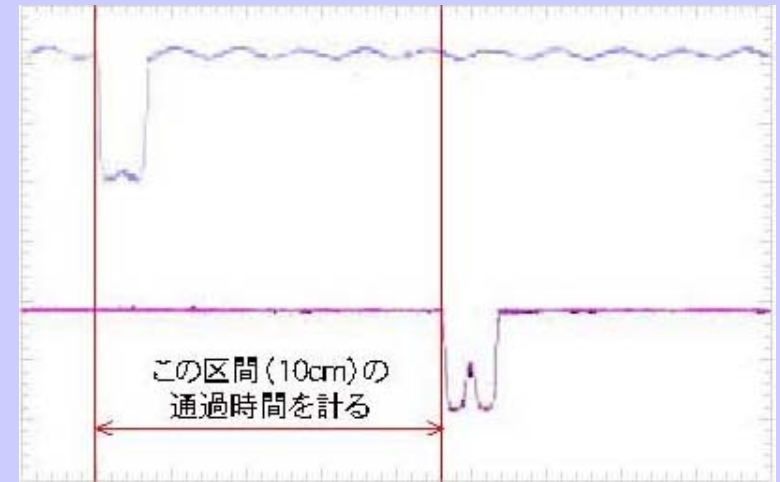
ビー玉を飛ばすのには、次のような装置を作り、実験した。

右の写真が発射装置である。ゴムを使って、パチンコのような仕組みでビー玉を飛ばしている。



# 10 初速度の計測

ビー玉の初速度を求めるために、下図のような仕組みを利用した。ビー玉が通ると、右図のような波形がオシロスコープ（使用機器：HP54645A）に出るので、通過時間を計り、そこから初速度を求めた。



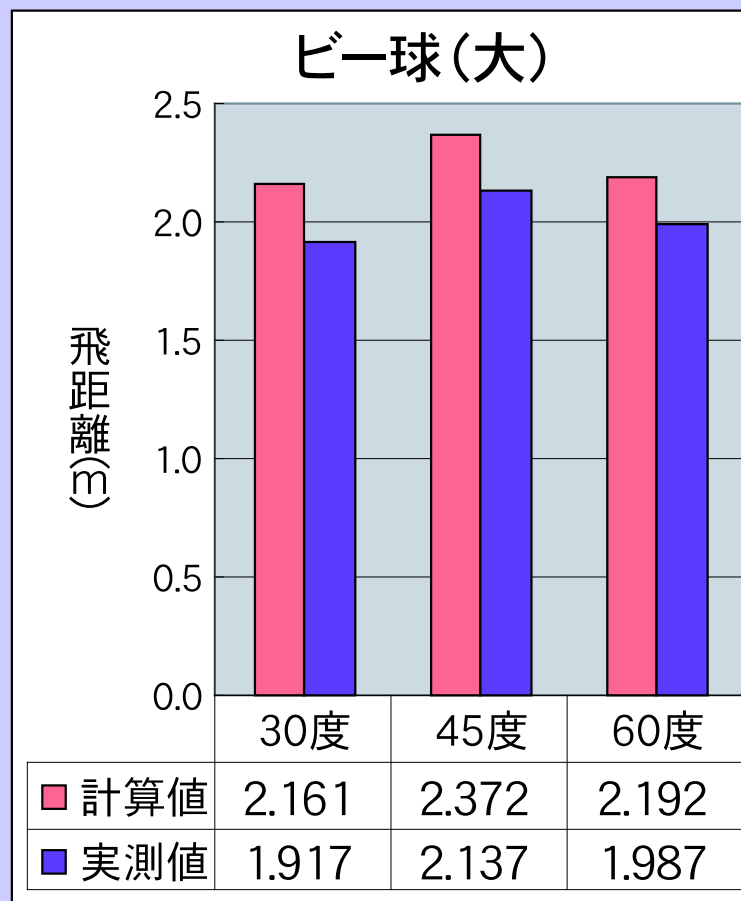
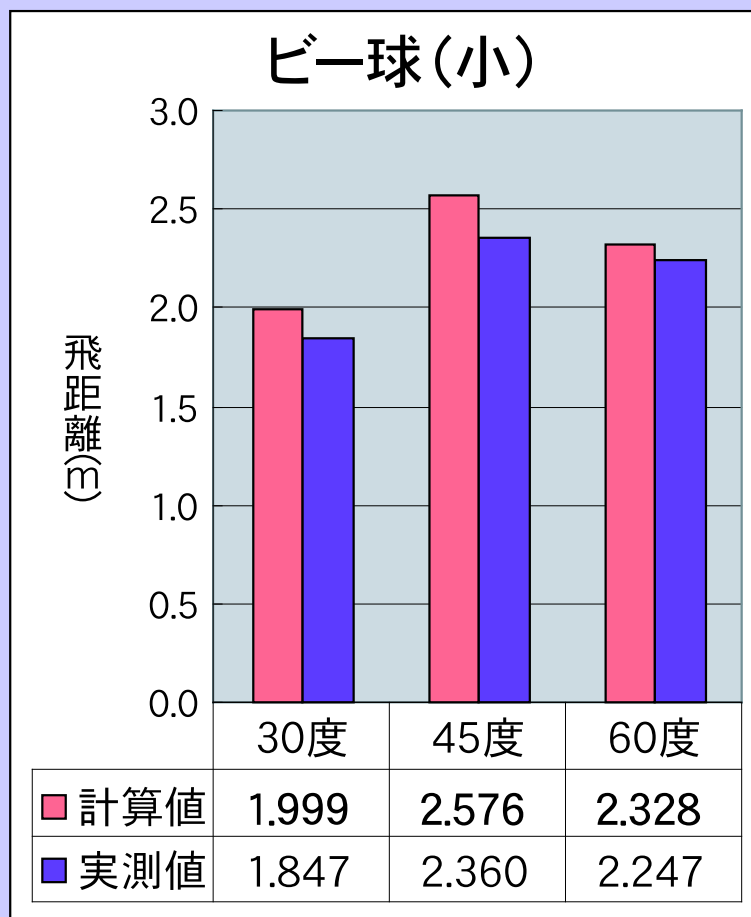
# 11 結果と考察

次に、実験結果とそのグラフを載せる。結果のグラフは5回の最大値と最小値を除いた平均をとったものである。

	回数	角度 $\theta$ (度)	初速度 $v_0$ (m/s)	高さ(m)	実際の 飛距離 (m)	計算での 飛距離 (m)	誤差(m)		回数	角度 $\theta$ (度)	初速度 $v_0$ (m/s)	高さ(m)	実際の 飛距離 (m)	計算での 飛距離 (m)	誤差(m)
ビー球(大)	1	30	4.016	0.495	1.760	2.026	0.266	ビー球(小)	1	30	4.016	0.495	1.990	2.026	0.036
	2	30	4.081	0.495	1.810	2.077	0.267		2	30	5.128	0.495	2.640	2.987	0.347
	3	30	4.651	0.495	2.300	2.551	0.251		3	30	3.521	0.495	1.460	1.660	0.200
	4	30	4.464	0.495	2.180	2.390	0.210		4	30	4.405	0.495	2.090	2.340	0.250
	5	30	3.690	0.495	1.620	1.781	0.161		5	30	3.472	0.495	1.410	1.625	0.215
	平均	30	4.187	0.495	1.917	2.161	0.245		平均	30	3.981	0.495	1.847	1.999	0.152
	1	45	4.630	0.681	2.500	2.730	0.230		1	45	3.344	0.681	1.470	1.619	0.149
	2	45	4.386	0.681	2.190	2.496	0.306		2	45	5.263	0.681	3.130	3.391	0.261
	3	45	4.464	0.681	2.370	2.570	0.200		3	45	4.237	0.681	2.150	2.358	0.208
	4	45	3.906	0.681	1.850	2.068	0.218		4	45	4.587	0.681	2.480	2.688	0.208
	5	45	3.717	0.681	1.700	1.910	0.210		5	45	4.587	0.681	2.450	2.688	0.238
	平均	45	4.252	0.681	2.137	2.372	0.235		平均	45	4.470	0.681	2.360	2.576	0.216
	1	60	5.102	0.824	2.520	2.702	0.182		1	60	5.650	0.824	3.030	3.233	0.203
	2	60	4.484	0.824	1.650	2.165	0.515		2	60	4.854	0.824	2.400	2.479	0.079
	3	60	4.255	0.824	1.900	1.982	0.082		3	60	3.802	0.824	1.520	1.645	0.125
4	60	4.348	0.824	2.030	2.055	0.025	4	60	4.444	0.824	2.030	2.132	0.102		
5	60	4.717	0.824	2.030	2.360	0.330	5	60	4.739	0.824	2.310	2.379	0.069		
平均	60	4.516	0.824	1.987	2.192	0.205	平均	60	4.679	0.824	2.247	2.328	0.081		

# 11 結果と考察

結果は以下のようになった。どちらのビー玉でも、また、どの発射角度でも実測値が計算値を 1 割ほど下回った。



## 11 結果と考察

---

実験では、どの角度でも、実測値が計算値を下回るという結果になった。

これは、初速度の計測の仕方に問題があると思われる。計測では飛び出す手前 10cm の間の平均速度をとっているが、実際はこの区間でも、ビー玉が転がるときの摩擦および重力により減速しているため、実際の初速度はもっと遅くなり、距離が短くなったと考えられる。初速度の計測をきちんとすればもっと正確に測定できると予想される。

## 12 今後の課題

---

- 今回の実験では、初速度の計測方法に問題があった。これをもっと正確にすれば、実測値と計算値の誤差をもっと小さくすることができると考えられる。

## 12 今後の課題

---

- 今回の実験では、初速度の計測方法に問題があった。これをもっと正確にすれば、実測値と計算値の誤差をもっと小さくすることができると考えられる。
- 次は、空気抵抗の影響が大きいピンポン玉などを使って実験して、どれだけ誤差が出るのかを調べてみたいと思う。

## 12 今後の課題

---

- 今回の実験では、初速度の計測方法に問題があった。これをもっと正確にすれば、実測値と計算値の誤差をもっと小さくすることができると考えられる。
- 次は、空気抵抗の影響が大きいピンポン玉などを使って実験して、どれだけ誤差が出るのかを調べてみたいと思う。
- その際は、空気抵抗の影響を考慮した計算式についても研究してみたい。